dev : Nombres de Bell

Leçons : 190, 230, 243, 241.
réf : Voyage en Analystan - Caldero p78 + Oraux X ENS Algèbre 1. p14.

prop : Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on note B_n le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1,n]\!]$.
et $B_0=1$ par convention.
On a $B_k=\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^k}{n!}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

dem :
Pour montrer le résultat, on va étudier la série $\sum\frac{B_n}{n!}z^n$.

① Etude du rayon de convergence :

ⓐ On cherche à réécrire B_n pour pouvoir travailler avec.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

(n+1 à l'un d'eux, st de card le 1 et n+1)

* E_k : ensemble des partitions de $[\![1,n+1]\!]$ pour lesquelles la partie qui contient $n+1$ est de cardinal $k+1$.

$(E_0,\dots,E_n)$ forme une partition de l'ensemble des partitions de $[\![1,n+1]\!]$.
On a donc : $B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}|E_k|$.

* Calcul $|E_k|$:

Soit $k\in[\![0,n]\!]$. i) On choisit k éléments dans $[\![1,n+1]\!]$: $\binom{n}{k}$
ii) On réalise une partition des $n-k$ éléments restant : B_{n-k}.
Donc $|E_k|=\binom{n}{k}B_{n-k}$ et $B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_j$ (par CDV)

ⓑ On cherche à majorer B_n :

voir si temps

Intuition : $B_0=0$; $B_1=1$. car juste $\{1\}$.
B_2 : $\{\{1\},\{2\}\}$, $\{\{1,2\}\}$ $\rightsquigarrow B_2=2$
B_3 : $\{\{1,2,3\}\}$, $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, $\{\{1\},\{2,3\}\}$, $\{\{2\},\{1,3\}\}$, $\{\{3\},\{1,2\}\}$: $B_3=5$.

On peut conjecturer : $B_n\leq n!$.

* Montrons le par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.

ini : ok (jusque $n=3$)
Her : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons : $B_k\leq k!$ $\forall k\leq n$.
On a : $B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k!=n!\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\frac{1}{(n-k)!}}_{\leq 1}\leq n!(n+1)=(n+1)!$.

La propriété est vérifiée au rang $n+1$.
ccl : $B_n\leq n!$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

* On a donc $\frac{B_n}{n!}\leq 1$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ d'où $R\geq 1$ $\left(\left(\frac{B_n}{n!}1^n\right)\text{ bornée (par 1)}\right)$

On note f la somme de cette série : $f(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}z^n$ $\forall z\in D(0,R)$ $\left(]-R,R[\text{ sur } \mathbb{R}\right)$

② Etude de f sur $]-R,R[$.

Soit $z\in]-R,R[$. On a :
$f(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}z^n=1+\sum_{n\geq 1}\frac{B_n}{n!}z^n=1+\sum_{n\geq 0}\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}z^{n+1}$.

f est dérivable sur $]-R,R[$ et :

$$f'(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}(n+1)z^n\underset{\text{par 1)a)}}{=}\sum_{n\geq 0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_j\right)z^n=\sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{B_k}{k!}\frac{1}{(n-k)!}\right)z^n.$$

On reconnaît le produit de Cauchy entre $\sum \frac{B_n}{n!} z^n$ et $\sum \frac{z^n}{n!}$ qui ont toutes deux un RDC $\geq R$ (car exp RDC $= +\infty$).
On a donc :

$$f'(z) = \left(\sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}\right) = f(z)e^z.$$

On en déduit : $f(z) = C e^{e^z}$, où $C \in \mathbb{R}$., $\forall z \in]-R,R[$.

On a de plus $B_0 = f(0) = 1$ d'où $C = e^{-1}$ et $f(z) = \frac{1}{e} e^{e^z}$ sur $]-R,R[$.

③ Nouvelle écriture de f en série entière :
On a $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$e^{e^z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} e^{nz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nz)^k}{k!}$$

De plus : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|nz|^k}{n!k!} = \frac{e^{|nz|}}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{|nz|}}{n!} = e^{e^{|z|}}$.

La série double est donc sommable et par le thm de Fubini :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{e}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}\right)\frac{z^k}{k!}$$

④ Conclusion :
Par unicité du développement en série entière : $B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$